

Целочисленные неравенства

Пример. Винни-Пух, Сова, Кролик и Пятачок съели 70 бананов, причем каждому досталось хотя бы по одному банану. Винни-Пух съел больше, чем каждый из остальных; Сова и Кролик вместе съели 45 бананов. Сколько бананов съел Пятачок?

Пример. Про натуральные числа a, b известно, что $a + 3b$ делится на 777 и $2a + b$ делится на 777. Докажите, что $a + b \geq 777$.

Таким образом, мы получаем две крайне полезные идеи:

Идея 1: если $a > b$, при этом a, b - целые числа, то данное неравенство равносильно неравенству $a \geq b + 1$.

Идея 2: если a делится на число b , то $a \geq b$.

1. Про натуральные числа a, b, c известно, что $ab : 8c$, $bc : 9a$, $ac : 10b$. Докажите, что $abc \geq 720$.

2. По итогам математической олимпиады восемь участников получили 97 книг. За более высокое место давали больше книг. Известно, что все участники получили разное число книг, причем за последние два места книг было вручено больше, чем за первое место. Сколько книг получил каждый из восьми участников? Найдите все решения и покажите, что других нет.

3. Найдите наименьшее такое натуральное n , что $(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)$ делится на 1000.

4. Среди 20 различных натуральных чисел есть 11 чисел, кратных 13 и 13 чисел, которые кратны 11. Докажите, что среди них есть число, которое больше 500.

5. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ является целым числом. Докажите, что $\text{НОД}(a, b)^2 \leq a + b$.

Целочисленные неравенства

Пример. Винни-Пух, Сова, Кролик и Пятачок съели 70 бананов, причем каждому досталось хотя бы по одному банану. Винни-Пух съел больше, чем каждый из остальных; Сова и Кролик вместе съели 45 бананов. Сколько бананов съел Пятачок?

Пример. Про натуральные числа a, b известно, что $a + 3b$ делится на 777 и $2a + b$ делится на 777. Докажите, что $a + b \geq 777$.

Таким образом, мы получаем две крайне полезные идеи:

Идея 1: если $a > b$, при этом a, b - целые числа, то данное неравенство равносильно неравенству $a \geq b + 1$.

Идея 2: если a делится на число b , то $a \geq b$.

1. Про натуральные числа a, b, c известно, что $ab : 8c$, $bc : 9a$, $ac : 10b$. Докажите, что $abc \geq 720$.

2. По итогам математической олимпиады восемь участников получили 97 книг. За более высокое место давали больше книг. Известно, что все участники получили разное число книг, причем за последние два места книг было вручено больше, чем за первое место. Сколько книг получил каждый из восьми участников? Найдите все решения и покажите, что других нет.

3. Найдите наименьшее такое натуральное n , что $(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)$ делится на 1000.

4. Среди 20 различных натуральных чисел есть 11 чисел, кратных 13 и 13 чисел, которые кратны 11. Докажите, что среди них есть число, которое больше 500.

5. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ является целым числом. Докажите, что $\text{НОД}(a, b)^2 \leq a + b$.